XXXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 3
Ensino Médio

Esta prova também corresponde à prova da Primeira Fase da Olimpíada Regional nos Estados de:
AL – BA – ES – MG – PA – RS – SC

16 de junho de 2012

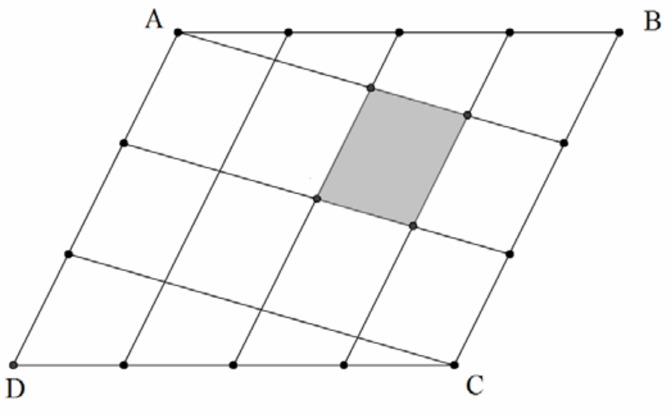
A duração da prova é de 3 horas.
Cada problema vale 1 ponto.
Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
Você pode solicitar papel para rascunho.
Entregue apenas a folha de respostas.
Ao participar o aluno se compromete a não divulgar o conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.

1) Quantas vogais têm a resposta correta desse problema? Não conte a letra A ou E das alternativas A e E.
A) Seis **B)** Cinco **C)** Quatro **D)** Três **E)** Duas

2) Na expressão $\dfrac{M\times A\times T\times E\times M}{A\times T\times I\times C\times A}$, letras diferentes representam dígitos diferentes e letras iguais representam dígitos iguais. Qual é o maior valor possível desta expressão?
A) 38 **B)** 96 **C)** 108 **D)** 576 **E)** 648

3) Em uma pesquisa de rua, cada entrevistado respondeu a quatro perguntas, podendo sua resposta ser *sim* ou *não*, para cada uma das perguntas. Qual o número mínimo de entrevistados para garantirmos que duas pessoas responderam igualmente a todas as perguntas?
A) 16 **B)** 17 **C)** 9 **D)** 5 **E)** 33

4) Os lados *AB* e *DC* do paralelogramo *ABCD* foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados *AD* e *BC* foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados como indica a figura abaixo. Se a área de *ABCD* é 84, determine a área sombreada.

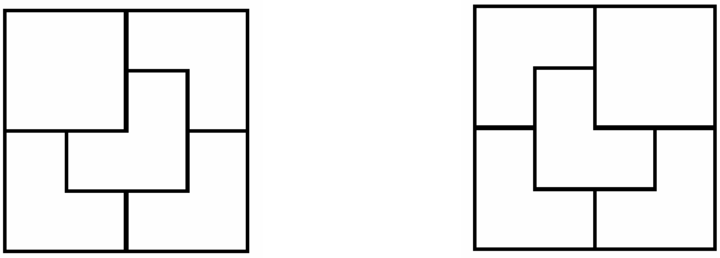


A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 7 **E)** 12

5) Em 2012 estamos realizando a edição 34 da OBM, e mdc(2012, 34) = 2. Supondo que a OBM sempre será realizada todo ano, qual é o maior valor possível para o mdc do ano e da edição da OBM realizada no ano?
A) 12 **B)** 28 **C)** 38 **D)** 1978 **E)** 2012

6) Os algarismos não nulos *A*, *B* e *C* formam os números *ABC*, *BCA* e *CAB* tais que $ABC + BCA + CAB = AAA \times 10$. Quantos números *ABC* desse tipo existem?
A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 15 **E)** nenhum

7) De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 4 × 4 com um quadrado de lado 2 e quatro peças idênticas no formato de L que ocupam três casinhas do tabuleiro? O tabuleiro não pode ser rotacionado, ou seja, as duas possibilidades a seguir devem ser consideradas distintas:



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

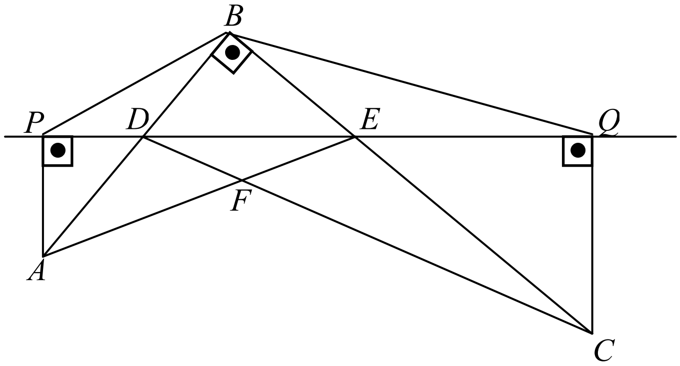
8) Se $x^2 = 2x + 4$, então $(x + 1)^{-1}$ é igual a
A) $x + 2$ **B)** $x - 3$ **C)** $x - 1$ **D)** $2x + 5$ **E)** $3x + 5$

9) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $AB = BC = CD = 1$ e $m(A\hat{B}D) = m(A\hat{C}B)$. Sabendo que as medidas, em graus, dos ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}D$ são inteiras, determine quantos quadriláteros $ABCD$ podem ser construídos satisfazendo as condições acima.
A) 20 **B)** 21 **C)** 22 **D)** 23 **E)** 24

10) As massas de todos os pares possíveis formados com 5 estudantes são 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg e 101 kg. Qual é a massa do estudante de massa intermediária?
A) 52 kg **B)** 51 kg **C)** 49 kg **D)** 48 kg **E)** 46 kg

11) Seja $N = \{0,1,2,\ldots\}$ e considere a função $f\colon N \to N$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$ e, para todo natural $n \geq 1$, satisfaz as seguintes condições:
i) $f(3n) = 3 \cdot f(n) + 1$;
ii) $f(3n + 1) = 3 \cdot f(n) + 2$;
iii) $f(3n + 2) = 3 \cdot f(n)$;
Então $f(2012)$ é igual a:
A) 101 **B)** 102 **C)** 103 **D)** 104 **E)** 105

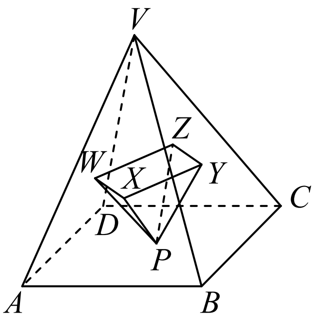
12) Na figura a seguir, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto; a reta r corta os segmentos AB e BC em D e E, respectivamente; as retas CD e AE se cortam em F; P e Q são as projeções ortogonais de A e C sobre a reta r, respectivamente.



Sendo o ângulo entre as retas CD e AE igual a $m(A\hat{F}D) = 40^\circ$, a medida de $P\hat{B}Q$, em graus, é
A) 110 **B)** 120 **C)** 130 **D)** 140 **E)** 160

13) Anos bissextos têm um dia a mais, 29 de fevereiro, que os demais anos e ocorrem a cada 4 anos. Esmeralda nasceu no dia 29 de fevereiro, em um domingo. Sabendo que 29 de fevereiro de 2012 caiu em uma quarta-feira, em qual ano Esmeralda pode ter nascido?
A) 1972 **B)** 1976 **C)** 1980 **D)** 1984 **E)** 1988

14) Considere uma pirâmide *VABCD* de base quadrada. Seja *P* o centro da base *ABCD* e *X*, *Y*, *Z* e *W* pontos sobre as faces laterais tais que *PXYWZ* é uma pirâmide semelhante a *VABCD*, com as diagonais da base *XZ* e *YW* paralelos a *BC* e *CD*, respectivamente.



A razão de semelhança entre as duas pirâmides é
A) $1:(\sqrt{2}+1)$ **B)** 1:3 **C)** 1:2 **D)** $1:\sqrt{2}$ **E)** $1:(2\sqrt{2}+3)$

15) Um painel luminoso é formado por 10 círculos grandes. Dentro de cada círculo há quatro lâmpadas: uma amarela, uma verde, uma vermelha e uma azul. De quantos modos podemos acender o painel de modo que pelo menos uma lâmpada de cada cor fique acesa? Cada círculo pode ter de zero a quatro lâmpadas acesas, ou seja, é permitido duas lâmpadas acesas no mesmo círculo.
A) $(2^{10}-1)^4$ **B)** $(2^4-1)^{10}$ **C)** $2^{10}-1$ **D)** 2^4-1 **E)** $2^{10}-2^4$

16) A soma de dois inteiros positivos é 2012. A diferença entre o maior e o menor valores possíveis do produto dos dois números é
A) 1006^2 **B)** 1005^2 **C)** $1005\cdot1007$
D) $1005\cdot1006$ **E)** $1006\cdot1007$

17) O triângulo *ABC* tem lados *AB* = 6, *AC* = 8 e *BC* = 10. Escolhe-se um ponto *X* ao acaso no interior do triângulo *ABC*. Sejam p_A, p_B e p_C as probabilidades de que o vértice do triângulo *ABC* mais próximo de *X* seja *A*, *B* e *C*, respectivamente. Então
A) $p_A > p_B = p_C$ **B)** $p_A > p_B > p_C$ **C)** $p_A > p_C > p_B$
D) $p_A < p_B < p_C$ **E)** $p_A = p_B = p_C$

18) Numa festa de criança, o palhaço *Macaxeira* irá distribuir 21 balas para 5 crianças que participam de uma brincadeira. Macaxeira quer fazer a distribuição satisfazendo às seguintes condições:
1) Cada criança deve receber pelo menos uma bala;
2) Cada criança recebe um número diferente de balas;
3) O número de balas é feito em ordem decrescente, de acordo com sua altura (a menor criança recebe mais balas e a maior recebe menos balas).
Supondo que todas as crianças tem alturas diferentes, de quantos modos ele pode fazer essa distribuição?
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

19) Quantos elementos tem o maior subconjunto de {1,2,3,…,25} que não contém dois números distintos cujo produto é um quadrado perfeito?
A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

20) O número e, uma das constantes mais importantes da Matemática, pode ser definido por

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

em que $0! = 1$ e $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ para $n > 0$.

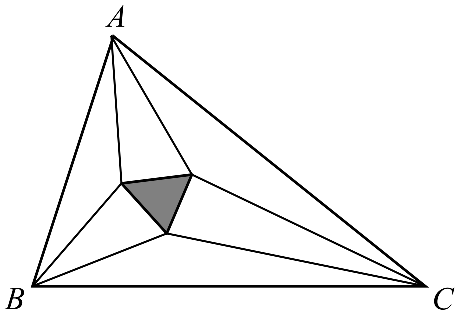
Então o número $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = \frac{1^2}{0!} + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{4^2}{3!} + \cdots$ é igual a

A) $2e$ **B)** $4e$ **C)** $5e$ **D)** e^2 **E)** $(e + 1)^2$

21) Qual é a maior potência de 2 que divide $2011^{2012} - 1$?

A) 2 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 16 **E)** 32

22) O *teorema de Morley* diz que, ao traçarmos as retas que dividem cada ângulo interno de um triângulo ABC em três ângulos iguais, obtemos um triângulo equilátero chamado *triângulo de Morley de ABC*, como o que está destacado na figura a seguir:



Qual é a medida do lado do triângulo de Morley de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2?

A) $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ **B)** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{6} - 2$

D) $2 - \sqrt{3}$ **E)** $2\sqrt{3} - \sqrt{6}$

23) Para Mariazinha, existem somente quatro números que ela considera *atraentes* : 1, 3, 13 e 31. Um outro número será *quase atraente* somente se puder ser expresso como soma de pelo menos um de cada um dos quatro números atraentes. Por exemplo, 1 + 3 + 3 + 3 + 13 + 31 = 54 é quase atraente. No mínimo, quantos números atraentes devem ser somados para mostrar que 2012 é um número quase atraente?

A) 68 **B)** 70 **C)** 71 **D)** 99 **E)** 2011

24) Quantas soluções reais têm o sistema

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{z^2} \\ y + z = \dfrac{1}{x^2} \\ z + x = \dfrac{1}{y^2} \end{cases} ?$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** infinitas

25) Esmeralda desenhou uma tabela com 100 linhas e 100 colunas e escreveu, na linha i e coluna j da tabela, mdc(i, j) se $i < j$ e mmc(i, j) se $i \geq j$. Por exemplo, na linha 4, coluna 6 ela escreveu mdc(4,6) = 2 e na linha 15, coluna 10 ela escreveu mmc(15,10) = 30. Qual é o produto de todos os 100^2 números da tabela?

A) $100!^{99}$ **B)** $100!^{100}$ **C)** $100!^{101}$

D) $\text{mmc}(1,2,3,\ldots,100)^{100}$ **E)** $\text{mdc}(1,2,3,\ldots,100)^{100}$