

**35ª OLIMPIÁDA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**  
**PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)**  
**GABARITO**

**GABARITO NÍVEL 3**

1) C	6) D	11) B	16) D	21) C
2) D	7) E	12) C	17) A	22) C
3) D	8) A	13) B	18) A	23) C
4) E	9) B	14) D	19) C	24) C
5) B	10) C	15) D	20) D	25) E

- Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).
- Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: [www.obm.org.br](http://www.obm.org.br)

1) (C) O próximo ano cujos algarismos são 0, 1, 2, 3, em alguma ordem, é 2031, que é daqui a 18 anos.

2) (D) Comprando hoje o computador, Joana gastaria 1900 reais. Esperando o próximo dia, o preço do computador subiria para 2100 reais e ela gastaria  $\frac{95}{100} \times 2100 = 1995$  reais. Assim, ela perderia 95 reais.

3) (D) A soma dos algarismos de um número menor que 100 é menor ou igual a  $9 + 9 = 18$ . Assim, a soma dos números bem avaliados pelo critério do aluno só pode ter sido 7 ou 14. Existem três números com tais somas: 7, 70 e 77.

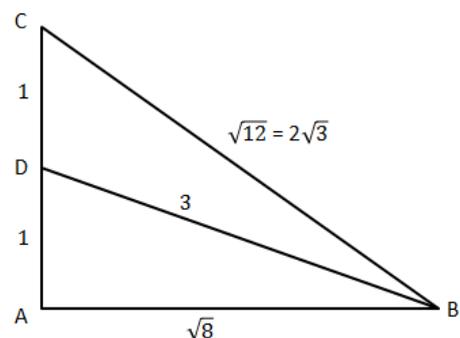
4) (E) A primeira condição nos diz que  $n \geq 55$  e a segunda que  $n \leq 59$ . Assim, teremos no máximo 8 múltiplos de 7 quando  $n = 56, 57, 58$  ou  $59$ .

5) (B) Temos que  $2013 = 3 \times 11 \times 61$ . Como o número 50 está na segunda coluna, o quadriculado retangular possui 33 linhas e 61 colunas. Assim, ao fim da 30ª coluna, escrevemos  $33 \times 30 = 990$  números. Portanto, o número 1000 será escrito na 31ª coluna.

6) (D) Temos que  $a^2 + ab - b^2 = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , pois  $a$  e  $b$  são reais positivos. Queremos

calcular  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 2 = 2 + \sqrt{5}$ .

7) (E) Como  $AC = 2$ , temos que  $AD = DC = 1$ . Pelo teorema de Pitágoras no triângulo  $DAB$ , temos  $AB^2 = 3^2 - 1^2 = 8$ . Novamente pelo Teorema de Pitágora, agora no triângulo  $ABC$ , temos:  $BC^2 = 2^2 + AB^2 = 12$ .



8) (A) Note que na linha  $k$  aparecem exatamente os  $k$  ímpares que ainda não estão nas linhas anteriores e que o último número ímpar de uma linha  $j$  qualquer é o  $[j.(j+1)/2]$ -ésimo ímpar. Dessa forma, temos que os  $k$  ímpares da linha  $k$  estão compreendidos no intervalo de  $[(k-1).k/2 + 1]$  até  $[k.(k+1)/2]$ . Como 2013 é o 1007º ímpar, para encontrarmos sua linha, devemos encontrar  $k$  inteiro que satisfaça:

$$(k-1).k/2 + 1 < 1007 < k.(k+1)/2.$$

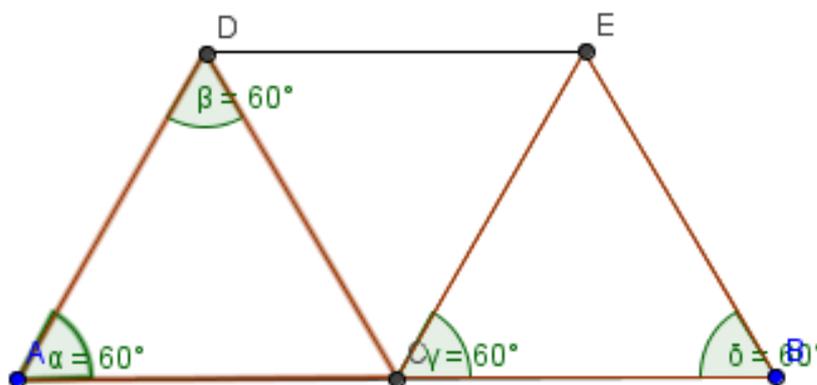
A primeira desigualdade implica que  $(k-1)^2 < 2 \cdot 1006$ , ou seja,  $k < \sqrt{2012} + 1 < 46$ . A segunda desigualdade implica que  $8057/4 < (k + 1/2)^2$  e conseqüentemente  $\sqrt{8057}/2 - 1/2 < k$ . O único inteiro nesse intervalo é  $k = 45$ .

9) (B) Contaremos inicialmente o número de triplas ordenadas de arestas  $(a, b, c)$  do cubo, onde quaisquer duas arestas são reversas. Podemos escolher inicialmente qualquer aresta  $a$ , o que pode ser feito de 12 maneiras. Feito isso, temos 4 escolhas para  $b$  e as escolhas de  $a$  e  $b$  automaticamente determinam  $c$ . Então, há  $12 \cdot 4 = 48$  triplas. Entretanto, cada tripla foi contada  $3! = 6$  vezes e, portanto, a resposta pedida é  $\frac{48}{6} = 8$ .

10) (C) Como  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 9 + 3 \cdot 6 = 27$ , podemos concluir que  $x + y = \sqrt[3]{27} = 3$ .

11) (B) A quantidade máxima de triângulos equiláteros é três.

Um exemplo de que esse valor pode ser atingido é:



Os triângulos  $ACD$ ,  $CDE$  e  $BCE$  são equiláteros.

Suponha que haja quatro triângulos equiláteros com vértices em cinco pontos do plano, digamos  $A, B, C, D, E$ . Digamos que  $ABC$  é equilátero. Se nenhum dos triângulos que usa dois dos vértices de  $ABC$ , ou seja,  $DAB, DAC, DBC, EAB, EAC, EBC$ , é equilátero, devemos ter que os triângulos  $ADE, BDE$  e  $CDE$  são equiláteros. Mas com isso teríamos que

$AD = BD = CD = DE = EA = EB = EC$ , o que implicaria que  $D$  e  $E$  coincidem, pois ambos seriam circuncentro do triângulo  $ABC$ . Então, um dos triângulos  $DAB, DAC, DBC, EAB, EAC, EBC$  é equilátero. Digamos então que  $DBC$  é equilátero. Daí,  $ABDC$  é um losango de ângulos  $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ . Agora, basta notar que dentre os triângulos  $EAB, EAC, EBC, EBD, ECD$ , só pode haver no máximo um triângulo equilátero. Isso é fácil de se testar, se um é equilátero nenhum dos outros poderá ser. Logo não é possível termos quatro triângulos equiláteros.

12) (C) Como  $O$  é o centro do círculo, temos  $\angle EOB = 2\angle ECB = 70^\circ$ . Como  $AO = OE$ , pelo teorema do ângulo externo aplicado ao ângulo  $\angle EOB$ , temos  $\angle EAO = 2\angle OEA = 35^\circ$ . Daí,  $\angle ADC = \angle AEC = 35^\circ$ . Como  $\angle ADC + \angle DAB = 90^\circ$ , podemos concluir que  $\angle DAE = 90^\circ - \angle ADC - \angle EAB = 20^\circ$

13) (B) Sendo  $t$  o tempo que as bolas levam para se encontrar, temos que a bola de Jade Maravilha percorreu na vertical  $(vt) \cdot \text{sen} \alpha$  e que a bola de Super Esmeralda percorreu na vertical  $(60t) \cdot \text{sen} 30^\circ$ . Como essas distâncias são iguais, temos ter  $v = 30 / \text{sen} \alpha$ . Para que  $v$  seja mínimo, devemos ter o valor máximo  $\text{sen} \alpha = 1$  e daí  $v = 30$  km/h.

14) (D) A órbita de um número  $x$  é definida como sendo o conjunto formado pelas iterações de  $f$ , ou seja, a órbita de  $x$  é o conjunto  $\{x, f(x), f(f(x)), \dots\}$ . Assim, vejamos as órbitas do números de 1 a 9:

Órbita do 1: 2 elementos

Órbita do 2: 3 elementos

Órbita do 3: 3 elementos

Órbita do 4: 4 elementos

Órbita do 5: 3 elementos

Órbita do 6: 4 elementos

Órbita do 7: 4 elementos

Órbita do 8: 2 elementos

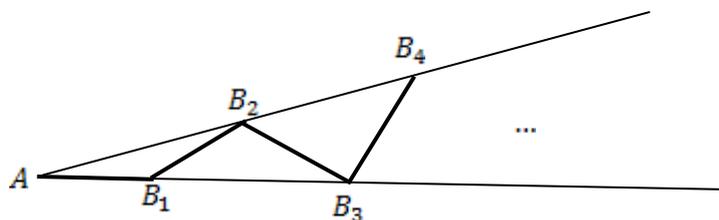
Órbita do 9: 4 elementos

Veja que se tivermos  $f$  aplicada um múltiplo da órbita de  $x$  de vezes então voltaremos a  $x$ , assim o valor desejado é um múltiplo de todas as órbitas, logo estamos interessados em  $\text{mmc}(2, 3, 4) = 12$ .

15) (D) As potências perfeitas de 1 a 100 que não são quadrados perfeitos são: 8, 27 e 32. Veja então que, para  $1 \leq k \leq 100$ ,  $f(k) = 8 \Leftrightarrow k = 8$ ,  $f(k) = 27 \Leftrightarrow k = 27, 28, 29, 30, 31$  e  $f(k) = 32 \Leftrightarrow k = 32, 33, 34, 35$ . Logo,  $f(k)$  é quadrado perfeito para

$100 - (1 + 5 + 4) = 90$  valores de  $k$  e, portanto, a probabilidade de  $f(k)$  ser quadrado perfeito é de 90%.

16) (D)



Veja que se  $\angle AB_2B_1 = 1^\circ$  e que, portanto,  $\angle B_2B_1B_3 = \angle AB_3B_2 = 2^\circ$ . Da mesma forma,  $\angle AB_4B_3 = 3^\circ$ . Continuando, é fácil ver que  $\angle AB_nB_{n-1} = (n-1)^\circ$ . Agora, no triângulo  $B_nB_{n-1}B_{n-2}$ , temos que  $\angle B_{n-1}B_{n-2}B_n = \angle AB_nB_{n-1} = (n-1)^\circ$ . Logo,  $2n-2 < 180 \Rightarrow n < 91$  e daí o maior valor possível de  $n$  é 90.

17) (A) Se a pulga  $P_1$  deu  $k_1$  saltos e a pulga  $P_2$  deu  $k_2$  saltos, temos:  $k_1m = k_2n = 100$ . Logo,  $m$  e  $n$  são divisores de 100. Como elas se encontram pela primeira vez em 1 metro, então  $\text{mmc}(m, n) = 100 = 2^2 \cdot 5^2$ , logo  $5^2 | n$  ou  $5^2 | m$ . Se  $5^2 \nmid n$  então necessariamente  $5^2 | m \Rightarrow n \leq 20 < 25 \leq m$ , contrariando  $n > m$ . Logo,  $5^2 | n \Leftrightarrow n = 25, 50$  ou  $100$ . Para  $n = 100$ ,  $m$  pode ser qualquer um dos outros 8 divisores de 100. Para  $n = 25$  ou  $n = 50$ , temos que  $4 | m$ , logo  $m = 4$  ou  $m = 20$ . No total, teremos:  $8 + 2 \cdot 2 = 12$

18) (A) Como cada caixa deve ter um número diferente de bolas brancas e há 10 bolas brancas para 5 caixas, haverá necessariamente uma caixa com nenhuma bola branca, uma com 1 bola branca, uma com 2 bolas brancas, uma com 3 bolas brancas e outra com 4 bolas brancas. Então, basta distribuímos as bolas vermelhas nas 5 caixas restantes. Chamemos de caixa  $i$  a caixa que está com  $i$  bolas brancas no momento. Se a caixa  $i$  receber  $x_i$  bolas vermelhas, devemos ter  $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ , onde  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  são inteiros não-negativos e  $x_0 \geq 1$ . Faça  $x_0 = y_0 + 1$ , de forma que agora estamos interessados no número de soluções inteiras não-negativas de  $y_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ . Fazendo uma bijeção das soluções dessa equação com o número de permutações de 7 bolinhas e 4 palitinhos, temos  $\binom{11}{4} = 330$  maneiras de distribuir as bolas.

19) (C) Como  $3^2 < 10$ , temos  $3^{400} = (3^2)^{200} < 10^{200}$ . Além disso, como  $3^4 = 81 > 2^3 \cdot 10$ , também temos  $3^{400} = (3^4)^{100} > (2^3 \cdot 10)^{100} = 2^{300} \cdot 10^{100}$ . Note que  $2^4 = 16 > 10$ , e assim  $3^{400} = 2^{300} \cdot 10^{100} = (2^4)^{75} \cdot 10^{100} > 10^{175}$ . Daí, podemos concluir que  $3^{400}$  possui entre 175 e 200 dígitos.

20) (D) Temos que  $a^2 + b + c = b^2 + c + a \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) = 0$ . Então,  $a = b$  ou  $a + b = 1$ . Da mesma forma,  $a = c$  ou  $a + c = 1$  e  $b = c$  ou  $b + c = 1$ . Note que não podemos

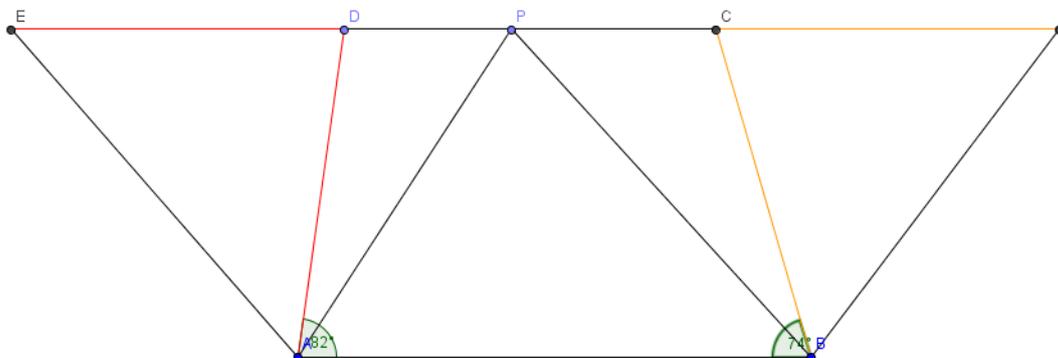
ter simultaneamente  $a + b = 1, a + c = 1, b + c = 1$  (pois  $a, b, c$  são inteiros). Então, podemos supor sem perdas que  $a = b$ . Agora, temos dois casos a considerar:  $a = b = c$  ou  $a = b$  e  $c = 1 - a$ .

No primeiro caso,  $k = a^2 + 2a \Leftrightarrow k + 1 = (a + 1)^2$ . Então, estamos interessados na quantidade de quadrados perfeitos de 2 a 2013, pois  $1 \leq k \leq 2012$ . Como  $44^2 < 2013 < 45^2$ , temos 44 quadrados perfeitos de 1 a 2013. Como 1 é quadrado perfeito e deve ser descontado, temos 43 quadrados perfeitos de 2 a 2013. Logo, há 43 valores possíveis para  $k$ .

No segundo caso,  $k = a^2 + 1$ . Como não há dois quadrados perfeitos diferindo de 2, não há interseções entre o primeiro caso e o segundo. Aqui, estamos interessados na quantidade de quadrados perfeitos de 0 a 2011. Agora, há 45 possíveis valores para  $k$ .

Logo, o total de valores é  $45 + 43 = 88$ .

**21) (C)** Considere a seguinte figura:



Os pontos  $E$  e  $F$  pertencem a reta  $CD$  e são tais que  $DE = DA$  e  $CB = CF$ . Como  $PC + CB = AB$  e  $AD + DP = AB$ , temos que  $EP = PF = AB$  e então como  $CD$  é paralelo a  $AB$ , temos que  $EPAB$  e  $PFAB$  são paralelogramos. Temos que  $\angle ADE = 82^\circ$  e, como  $\triangle ADE$  é isósceles de base  $AE$ ,  $\angle DEA = \angle PBA = 49^\circ$ . Da mesma forma,  $\triangle FCB$  isósceles e  $\angle FCB = 74^\circ$ , então  $\angle PFB = \angle PAB = 53^\circ$ . Daí,  $\angle APB = 180^\circ - 49^\circ - 53^\circ = 78^\circ$ .

**22) (C)** Sejam  $A$  o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 4 nos milhares,  $B$  o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 3 nas centenas,  $C$  o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 2 nas dezenas e  $D$  o conjunto dos números de quatro algarismos distintos que possuem 1 nas unidades. A quantidade descrita no problema é  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - n(A \cup B \cup C \cup D)$ , lembrado que para um número ter 4 algarismos não pode ter dígito dos milhares 0.

Pelo Princípio da Inclusão – Exclusão, temos que

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C \cup D) &= n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - \\ &n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) \\ &+ n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

Contando os números, tem-se  $n(A) = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$  e  $n(B) = n(C) = n(D) = 8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ . Também temos  $n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(A \cap D) = 8 \cdot 7 = 56$  e  $n(B \cap C) = n(B \cap D) = n(C \cap D) = 7 \cdot 7 = 49$ .

Ainda,  $n(A \cap B \cap C) = n(A \cap B \cap D) = n(A \cap C \cap D) = 7$  e  $n(B \cap C \cap D) = 6$ .

Por fim,  $n(A \cap B \cap C \cap D) = 1$ , apenas o número 4321.

Logo,  $n(A \cup B \cup C \cup D) = (504 + 3 \cdot 448) - (3 \cdot 56 + 3 \cdot 49) + (3 \cdot 7 + 6) - 1 = 1559$ .

Daí, a quantidade é  $4536 - 1559 = 2977$ , que se encaixa no item C.

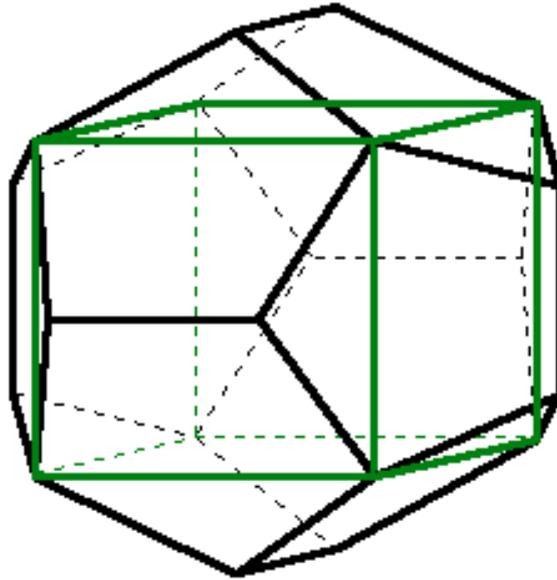
**23) (C)** A equação dada é equivalente a  $x(x + 2013 \cdot 2012) = 2013^y$ . Veja que  $2013 \mid x(x + 2013 \cdot 2012) \Rightarrow 2013 \mid x^2 \Rightarrow 2013 \mid x$ , pois  $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$  é livre de quadrados. Fazendo então  $x = 2013k$ , temos  $2013^2 k(k + 2012) = 2013^y \Leftrightarrow k(k + 2012) = 2013^{y-2} (y > 2)$ . Se  $y = 3$ , temos  $k = 1$ , o que nos dá uma solução. Suponhamos agora  $y > 3$  e daí se  $d \mid k$  e  $d \mid k + 2012$ , teríamos  $d \mid 2012$ , o que nos dá  $d = 1$ , pois 2012 e 2013 são primos entre si. Logo, podemos escrever  $k = a^{y-2}$  e  $k + 2012 = b^{y-2}$ , onde  $a$  e  $b$  são inteiros positivos tais que  $ab = 2013$ . Então,  $b^{y-2} - a^{y-2} = 2012$ . Temos que  $b^{y-2} - a^{y-2}$  é função crescente de  $y$  e, portanto,  $2012 \geq b^2 - a^2$ , com  $ab = 2013$ . Temos poucas possibilidades para  $a$  e  $b$ : podemos ter  $(a, b) = (1, 2013), (3, 671), (11, 183), (33, 61)$ . Em todos os casos, temos que  $b^2 - a^2 > 2012$ , contradição. Portanto,  $y = 3$  de fato.

**24) (C)** Como  $p(x)$  é par,  $p$  possui apenas monômios de grau par, ou seja, podemos escrever  $p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_2x^2 + a_0$  (isto pode ser demonstrado através da identidade polinomial  $p(x) = p(-x)$ ), onde  $a_{2n}, a_{2n-2}, \dots, a_0 \geq 0$

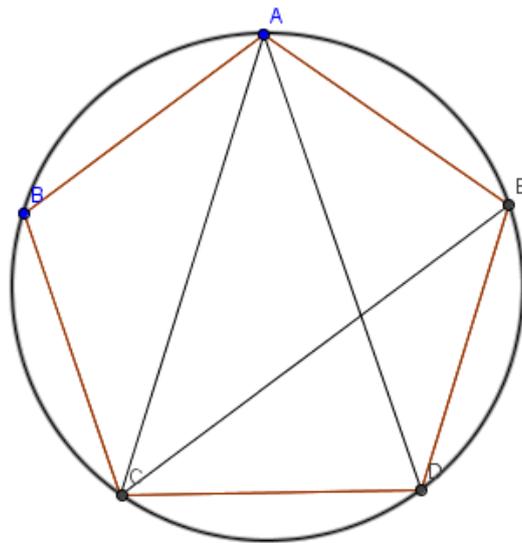
Então, para  $x \geq 0$ , veja que  $p$  é função crescente de  $x$ , pois é soma de funções crescentes e da mesma forma, para  $x < 0$ ,  $p$  é função decrescente de  $x$ , pois é soma de funções decrescentes.

Daí,  $p(x) = k$  pode ter no máximo duas soluções (uma não-negativa e outra negativa). Para  $p(x) = x^2$  e  $k = 1$ , temos a igualdade, pois as soluções de  $p(x) = k$  são  $x = 1$  ou  $x = -1$ .

**25) (E)** Considere a seguinte figura:



Temos que a aresta do cubo é a diagonal de um pentágono regular de lado 1 (todas as diagonais de um pentágono regular são congruentes).



Sendo  $AD = AC = CE = x$ , temos pelo teorema de Ptolomeu no quadrilátero  $AEDC$  que  $x^2 = x + 1$ , logo  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  é a raiz positiva da equação. O volume do cubo é  $x^3 = x^2 + x = 2x + 1$ . Substituindo, o volume do cubo é  $2 + \sqrt{5}$ .