

XXXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 3

1) A	6) C	11) D	16) D	21) C
2) A	7) D	12) A	17) D	22) D
3) B	8) A	13) C	18) D	23) B
4) A	9) B	14) C	19) C	24) D
5) E	10) D	15) D	20) E	25) E

- Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).
- Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site: www.obm.org.br

1. (A) Existem 6 caminhos entre A e B com os seguintes custos de pedágio:

$$\begin{aligned}7 + 6 &= 13 \\4 + 1 + 6 &= 11 \\4 + 3 + 5 &= 12 \\9 + 5 &= 14 \\8 + 1 + 5 &= 14 \\8 + 4 &= 12\end{aligned}$$

O valor mínimo é 11.

2. (A) Note inicialmente que pintamos $9 \cdot 6 = 54$ quadradinhos de vermelho. Quando serramos o cubo, temos 27 cubinhos e como cada cubinho tem 6 faces quadradas, o total de faces quadradas é igual a $6 \cdot 27 = 162$ quadradinhos. Destes, 54 são vermelhos e os $162 - 54 = 108$ restantes são brancos. Logo, a razão entre a superfície pintada de vermelho e a superfície pintada de branco é igual a $54/108 = 1/2$.

3. (B) Para decidir qual das opções é a maneira mais econômica de comprar 1,2kg de CHOCOBNM, vamos calcular o valor gasto em cada opção. Temos:

Na opção A), 6 latas de 200g, o valor da compra é $6 \times R\$3,00 = R\$18,00$.

Na B), 1 lata de 400g e 1 lata de 800g, o valor da compra é $1 \times R\$5,00 + 1 \times R\$9,00 = R\$14,00$.

Na C), 4 latas de 200g e 1 lata de 400g, o valor é $4 \times R\$3,00 + 1 \times R\$5,00 = R\$17,00$.

Na D), 2 latas de 200g e 1 lata de 800g, o valor é $2 \times R\$3,00 + 1 \times R\$9,00 = R\$15,00$.

E na E), 2 latas de 200g e 2 latas de 400g, o valor é $2 \times R\$3,00 + 2 \times R\$5,00 = R\$16,00$.

Ou seja, a opção B) é a mais econômica das opções apresentadas.

4. (A) Utilizaremos a notação $a|b$ para dizer que b é divisível por a . Então $30|72N \Leftrightarrow 5|12N \Leftrightarrow 5|N$. Além disso, $72|30N \Leftrightarrow 12|5N \Leftrightarrow 12|N$. Logo N é múltiplo de 5 e 12, ou seja, é múltiplo de 60. Então $N \geq 60$. Note que $N = 60$ é possível, pois $60|30 \cdot 72$.

5. (E) A proporção apresentada nos permite construir o seguinte padrão:

Meninos	Meninas	Total
1	5	6
2	6	8
3	7	10
4	8	12
5	9	14
...
15	19	34
16	20	36

Nela vemos que há 20 meninas nessa classe.

6. (C) Inicialmente, para cada opção calculemos o produto das vogais e consoantes de sua frase correspondente.

- A) $6 \times 6 = 36$
- B) $5 \times 6 = 30$
- C) $7 \times 6 = 42$
- D) $8 \times 5 = 40$
- E) $7 \times 7 = 49$

A única opção que corresponde ao número mencionado na opção é a alternativa C.

7. (D) Note que $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$. Como $0 < a \leq 1$ e $0 < b \leq 1$, $\frac{1}{a} \geq 1$ e $\frac{1}{b} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{1}{2}$. O máximo ocorre para $a = b = 1$.

Outra maneira de resolver o problema é observar que $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2} \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ é metade da média harmônica

de a e b , e é máximo quando a e b são máximos, ou seja, iguais a 1.

8. (A) Seja N o número de voos.

Se 10% dos voos foram cancelados, restaram 90% de N . Dos voos restantes, 20% foram cancelados pela chuva, ou seja, 20% de 90% de $N = 0,20 \times 0,90 \times N = 0,18 \times N = 18\%$ de N .

Dessa forma, a porcentagem do total de voos que foram cancelados é 28%.

9. (B) Seja $x = 20112007$. A expressão do problema é equivalente à:

$$\begin{aligned}(x+4)^2 + (x-4)^2 - 16x &= 2x^2 - 16x + 32 \\ &= 2(x^2 - 8x + 16) \\ &= 2(x-4)^2\end{aligned}$$

Ou seja, 2×20112003^2 .

10. (D) Podemos contar todas as maneiras de receber o troco de 37 centavos fazendo uma listagem de todos os recebimentos possíveis, ordenando as moedas em ordem decrescente: ou seja, dado que $37 = 25x + 10y + 5z + 1w$, basta contar quantas soluções inteiras não-negativas essa equação possui. Note que x representa o número de moedas de 25 centavos, y o número de moedas de 10 centavos, z o de 5 centavos e w o de 1 centavo. As soluções são:

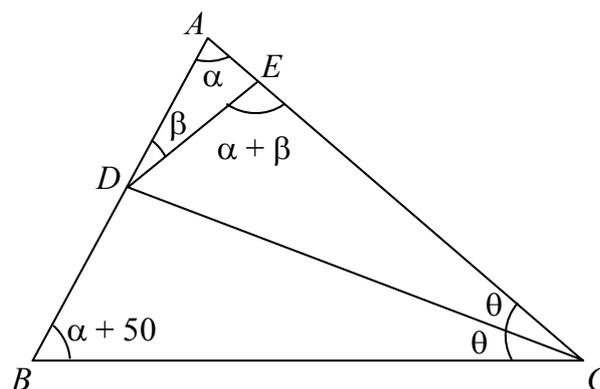
$$\begin{aligned}(1,1,0,2); (1,0,2,2); (1,0,1,7); (1,0,0,12); (0,3,1,2); (0,3,0,7); (0,2,3,2); (0,2,2,7); \\ (0,2,1,12); (0,2,0,17); (0,1,5,2); (0,1,4,7); (0,1,3,12); (0,1,2,17); (0,1,1,22); (0,1,0,27) \\ (0,0,7,2); (0,0,6,7); (0,0,5,12); (0,0,4,17); (0,0,3,22); (0,0,2,27); (0,0,1,32); (0,0,0,37)\end{aligned}$$

Logo, há um total de 24 maneiras.

11. (D) As possíveis fatorações em primos de tais inteiros são: p^3 ou $p \times q$. Como esses inteiros são menores que 30, devemos ter $p, q \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. A lista de tais inteiros é $2^3, 3^3, 2 \times 3, 2 \times 5, 3 \times 5, 2 \times 7, 2 \times 11, 2 \times 13$ e 3×7 .

12. (A) Sejam $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ADE}$ e $2\theta = \widehat{BCA}$. Temos $\widehat{ABC} = 50^\circ + \alpha$. Pelo teorema do ângulo externo no triângulo BCD : $\alpha + 50 + \theta = 90^\circ + \beta$ (*)

Além disso, $2\alpha + 2\theta + 50 = 180$ pelo soma dos ângulos interno do ΔABC . Substituindo o valor de $\alpha + \theta = \frac{180 - 50}{2} = 65$ em (*), temos $\beta = 25$.



13. (C) Inicialmente, o dinheiro total que as moças têm é igual a $11.2 + 7.5 + 3.10 = 87$, e com isso, temos que cada uma das moças deve possuir $87/3 = 29$ reais. Além disso, note que Esmeralda possui 22 reais, Rose tem 35 reais e Nelly tem 30 reais. Como Rosa e Nelly possuem mais do que 29 reais, elas devem dar algumas notas a alguém – Rosa deve dar pelo menos 2 notas de 5 (se ela desse só uma nota, ela teria 30 reais, mais do que 29), e Nelly deve dar pelo menos uma nota de 10. Daí, para Rosa conseguir 29 reais ela precisa receber pelo menos 2 notas de 2 reais, e para Nelly conseguir 29 reais, ela deve receber uma nota de 5 e duas de 2 reais. Portanto, Esmeralda entrega no mínimo 4 notas de 2 reais, Rosa entrega no mínimo 2 notas de 25 reais e Nelly entrega pelo menos uma nota de 10 reais. Com isso, o número de notas que trocaram de mãos é pelo menos 7. De fato, com 7 trocas é possível que as três moças possuam 29 reais:

- Nelly entrega uma nota de 10 reais a Esmeralda;
- Rosa entrega uma nota de 5 reais a Esmeralda e outra para Nelly;
- Esmeralda entrega duas notas de 2 reais a Rosa e 2 notas de 2 reais para Nelly;

14. (C) $\frac{1}{5^{12}} = \frac{4096}{10^{12}}$ concluímos que o primeiro dígito não nulo após a vírgula de $\frac{1}{5^{12}}$ é 4.

15. (D) Se hoje está chovendo, X deve obrigatoriamente ser um OVNI – nerd. Além disso, W não pode ser um ET-nerd, pois caso contrário estaria falando a verdade em um dia de chuva. Temos então a seguinte distribuição:

$(X, Y, Z, W) = (\text{OVNI}, \text{UFO ou ET}, \text{UFO ou ET}, \text{OVNI ou UFO})$.

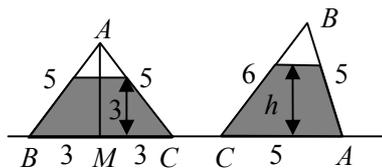
Se hoje não está chovendo, X mentiu e não pode ser um ET-nerd. As próximas três falas são verdadeiras, logo temos a seguinte distribuição.

$(X, Y, Z, W) = (\text{UFO}, \text{ET ou OVNI}, \text{ET ou OVNI}, \text{ET ou OVNI})$.

Portanto, é possível que haja um UFO nerd e três ET-nerds.

16. (D) Seja M o ponto médio de BC . Então, como ABC é isósceles com $AB = AC$ o segmento AM é também altura do triângulo. Logo $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 4$. Como a altura da água é 3,

o nível da água é igual a $\frac{3}{4}$ da altura do triângulo. Como os triângulos pequenos brancos formados pelos espaços são semelhantes ao triângulo original com a mesma razão de semelhança (raiz quadrada da razão entre as áreas, que é a mesma), a altura h é igual a $\frac{3}{4}$ da altura relativa H a B . Sendo a área de ABC igual a $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$, $\frac{AC \cdot H}{2} = 12 \Leftrightarrow 5H = 24 \Leftrightarrow H = \frac{24}{5} \text{ cm}$ e $h = \frac{3}{4}H = \frac{3}{4} \cdot \frac{24}{5} = \frac{18}{5} \text{ cm}$.



22. (D) Sendo a e b inteiros, utilizando o binômio de Newton temos

$$(1 + \sqrt{2})^{2011} = a + b\sqrt{2} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2011} \binom{2011}{k} (\sqrt{2})^k = a + b\sqrt{2} \Leftrightarrow a = \sum_{k=0}^{1005} \binom{2011}{2k} 2^k \text{ e } b = \sum_{k=0}^{1005} \binom{2011}{2k+1} 2^k$$

Assim,

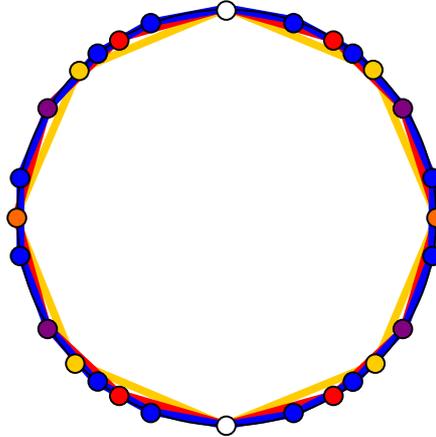
$$(1 - \sqrt{2})^{2011} = \sum_{k=0}^{2011} \binom{2011}{k} (-\sqrt{2})^k = \sum_{k=0}^{1005} \binom{2011}{2k} 2^k - \sum_{k=0}^{1005} \binom{2011}{2k+1} 2^k \sqrt{2} = a - b\sqrt{2}$$

$$\text{e } (1 - \sqrt{2})^{2010} = \frac{a - b\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{a - 2b + (a - b)\sqrt{2}}{-1} = 2b - a + (b - a)\sqrt{2}.$$

23. (B) Como $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2011} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{2011} \Leftrightarrow a > 2011$, a é pelo menos 2012. Substituindo $a = 2012$, encontramos $\frac{1}{2012} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2011} \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2011 \cdot 2012}$ e podemos tomar $b = c = 2 \cdot 2011 \cdot 2012$.

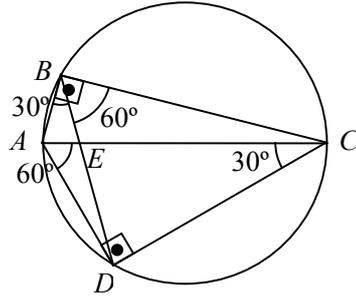
24. (D) Sejam A , B e C os conjuntos dos vértices dos três polígonos, de 8, 12 e 18 lados, respectivamente. Utilizaremos $|X|$ para denotar a quantidade de elementos do conjunto X . Então queremos calcular $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$. Mas considerando que os polígonos têm um vértice em comum, a quantidade de vértices comuns dos polígonos de m e n lados é igual a $\text{mdc}(m, n)$, e o mesmo resultado pode ser generalizado para mais que dois polígonos. Assim, o resultado pedido é $8 + 12 + 18 - (\text{mdc}(8, 12) + \text{mdc}(8, 18) + \text{mdc}(12, 18)) + \text{mdc}(8, 12, 18) = 38 - (4 + 2 + 6) + 2 = 28$.

É claro que você pode resolver o problema com um bom desenho:



25. (E) Como $4^2 + (8\sqrt{3})^2 = 4^2(1 + (2\sqrt{3})^2) = 4^2 \cdot 13 = (4\sqrt{13})^2$, o triângulo ABC é retângulo em B .

Como o quadrilátero $ABCD$ é inscritível, o ângulo D também é reto, e AC é um diâmetro do círculo circunscrito a $ABCD$. Enfim, como AD é metade do diâmetro AC , temos $m(\widehat{DAC}) = 60^\circ$ e $m(\widehat{ACD}) = 30^\circ$. Logo $m(\widehat{ABD}) = 30^\circ$ e $m(\widehat{DBC}) = 60^\circ$.



Seja $\alpha = m(\widehat{BAC})$, temos, pela lei dos senos,

$$\begin{aligned} \frac{BE}{\sin \alpha} &= \frac{AB}{\sin(180^\circ - 30^\circ - \alpha)} \Leftrightarrow BE = \frac{4}{\sin(30^\circ + \alpha)/\sin \alpha} = \frac{4}{(\sin 30^\circ \cos \alpha + \cos 30^\circ \sin \alpha)/\sin \alpha} \\ &= \frac{4}{\frac{1}{2} \cotg \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\frac{AB}{BC} + \sqrt{3}} = \frac{8}{\frac{4}{8\sqrt{3}} + \sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{7} \end{aligned}$$